PIRAMIDE

Slično kao i kod prizme i ovde ćemo najpre objasniti oznake ...

- sa **a** obeležavamo dužinu osnovne ivice
- sa **H** obeležavamo dužinu visine piramide
- sa **h** obeležavamo dužinu visine bočne strane (**apotema**)
- sa **s** obeležavamo dužinu bočne ivice (**izvodnica**)
- sa **B** obeležavamo površinu osnove (baze)
- sa **M** obeležavamo površinu omotača
- omotač se sastoji od **bočnih strana** (najčešće jednakokraki trouglovi) , naravno trostrana piramida u omotaču ima 3 takve strane, četvorostrana - 4 itd.
- ako u tekstu zadatka kaže **jednakoivična** piramida, to nam govori da su osnovna ivica i bočna ivica jednake , to jest : **a = s**
- ako u tekstu zadatka ima reč **prava** – to znači da je visina piramide normalna na ravan osnove ili ti ,

  jednostavnije rečeno , piramida nije kriva
- ako u tekstu zadatka ima reč **pravilna** , to nam govori da je u osnovi (bazi) pravilan mnogougao:

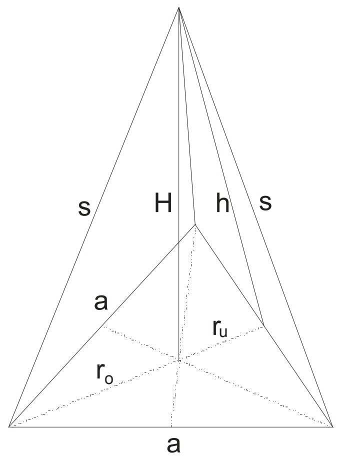
  jednakostraničan trougao, kvadrat, itd.

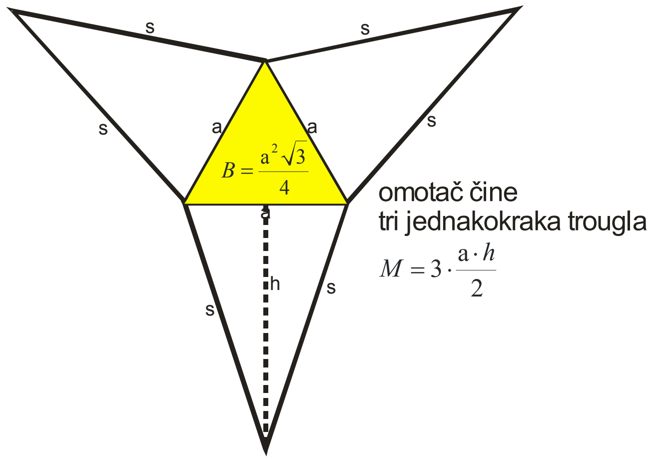
Dve najvažnije formule za izračunavanje površine i zapremine su:

$$P = B + M \quad \text{za površinu i}$$

$$V = \frac{1}{3}\, \mathrm{B} \cdot \mathrm{H} \quad \text{za zapreminu}$$

PRAVA PRAVILNA TROSTRANA PIRAMIDA



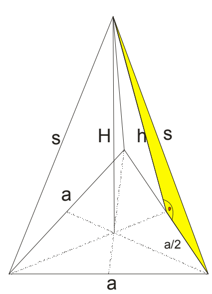


U omotaču se nalaze tri jednakokraka trougla (površina jednog od njih je $P_{bočne\ strane}=\frac{a\cdot h}{2}$) , a kako ih ima 3 u omotaču, to je: $M=3\frac{a\cdot h}{2}$

Formule za **površinu i zapreminu** će biti:

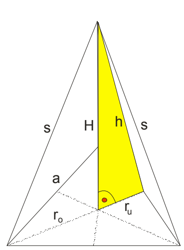
$$P=B+M$$
$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\frac{a\cdot h}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}B\cdot H$$
$$V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$$
$$V=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\cdot H$$



$$s^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

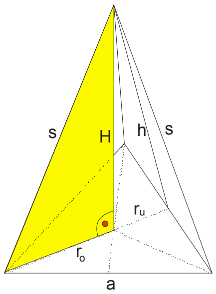
Ova Pitagorina teorema je ima kod svake piramide!



$h^2=H^2+r_u^2$ to jest

$$h^2=H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

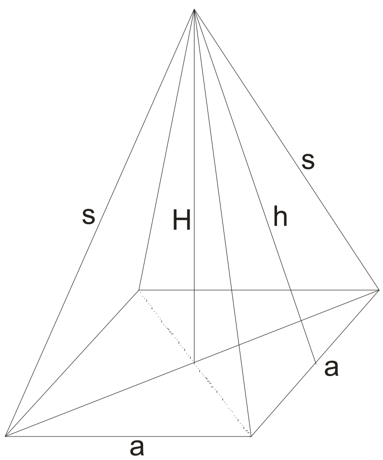
E ova i sledeća su samo za trostranu piramidu (pravu i pravilnu)

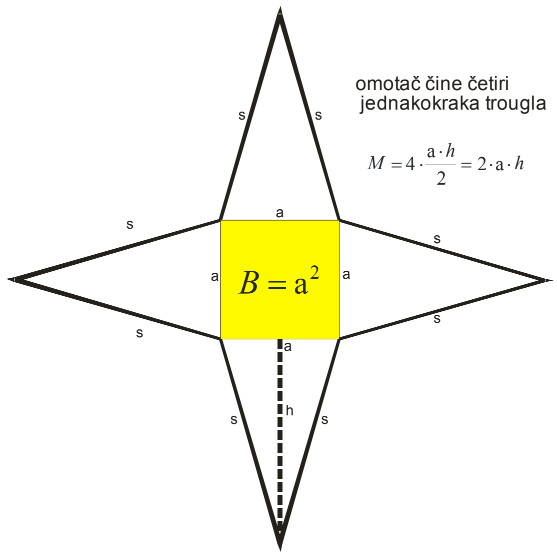


$$s^2 = H^2 + r_o^2 \quad \text{to jest}$$

$$s^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

PRAVA PRAVILNA ČETVOROSTRANA PIRAMIDA





Površine baze i omotača su dakle:

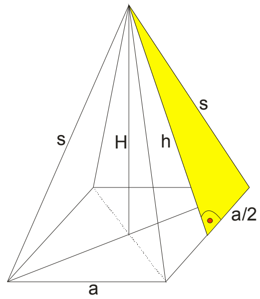
$B = a^2$ i $M = 4\dfrac{a \cdot h}{2}$ odnosno $M = 2ah$

A površina i zapremina cele piramide su:

$$P = B + M \qquad V = \frac{1}{3} B \cdot H$$

$$P = a^2 + 2ah \qquad V = \frac{1}{3} a^2 \cdot H$$

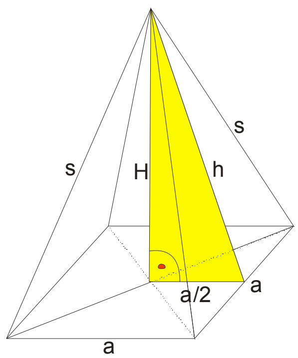
Pitagorina teorema se primenjuje:



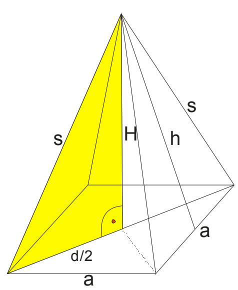
$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Ovo je ona što važi za svaku piramidu.

Sledeće dve su samo za pravu pravilnu četvorostranu:



$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

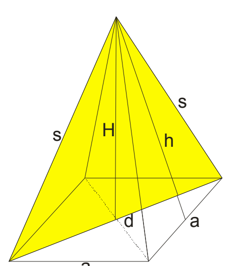


$$s^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{odnosno}$$

$$s^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \text{to jest}$$

$$s^2 = H^2 + \frac{a^2}{2}$$

Često se u zadacima daje i dijagonalni presek:



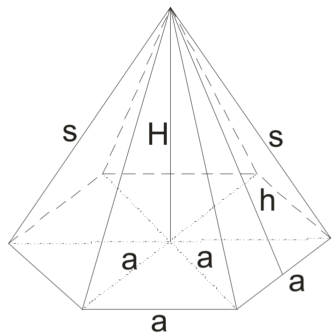
dijagonalni presek

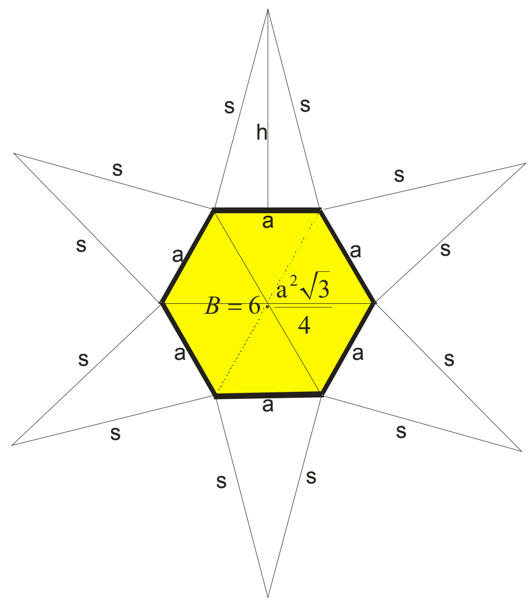
Površina dijagonalnog preseka(trougao) je:

$$P_{DP} = \frac{d \cdot H}{2} \quad \text{odnosno}$$

$$P_{DP} = \frac{a \cdot H\sqrt{2}}{2}$$

PRAVA PRAVILNA ŠESTOSTRANA PIRAMIDA





omotač čine šest
jednakokraka trougla

$$M = 6\cdot\frac{a\cdot h}{2} = 3\cdot a\cdot h$$

Površine baze i omotača su dakle:

$$B = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \qquad M = 6\frac{ah}{2} = 3ah$$

A površina i zapremina cele piramide su:

$$P = B + M$$

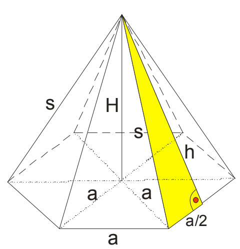
$$P = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$$

$$V = \frac{1}{3}BH$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$$

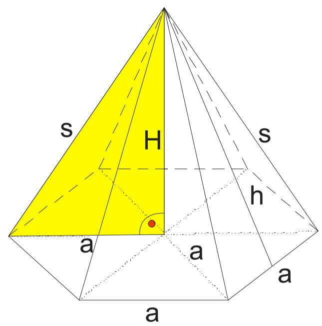
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$$

Pitagorina teorema se primenjuje na tri trougla (kao i kod prethodne dve piramide)

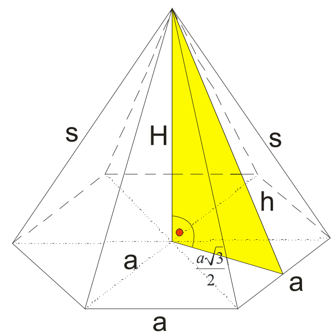


$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Ova važi kod svake….



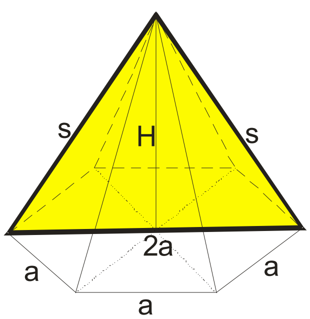
$$s^2 = H^2 + a^2$$



$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Kod šestostrane piramide razlikujemo dva dijagonalna preseka:

Veći dijagonalni presek:

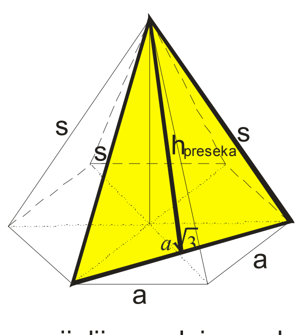


veći dijagonalni presek

P ovog dijagonalnog preseka je :

$$P_{vdp} = \frac{2a \cdot H}{2} \quad \text{to jest} \quad P_{vdp} = a \cdot H$$

Manji dijagonalni presek:



manji dijagonalni presek

P ovog dijagonalnog preseka je :

$$P_{mdp} = \frac{a\sqrt{3} \cdot h_{preseka}}{2}$$

SAVET:

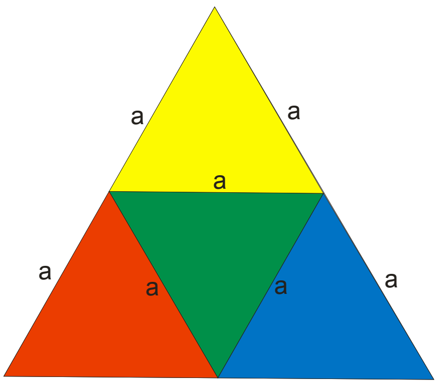
Pre nego što krenete sa proučavanjem zadataka, naučite formule i da nacrtate piramidu!

Ali , ako formule učite napamet, one ostanu u glavi dva - tri dana i ispare....

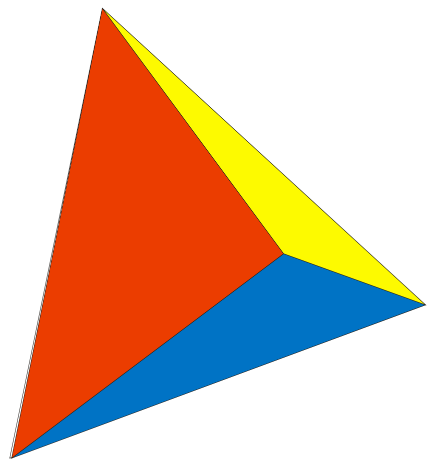
Zato naučite da formule sklapate "čitajući"sa slike!

Recimo , kažu u zadatku da se radi o pravoj pravilnoj jednakoivičnoj trostranoj piramidi.

Kako će izgledati formule za površinu i zapreminu?



mreža

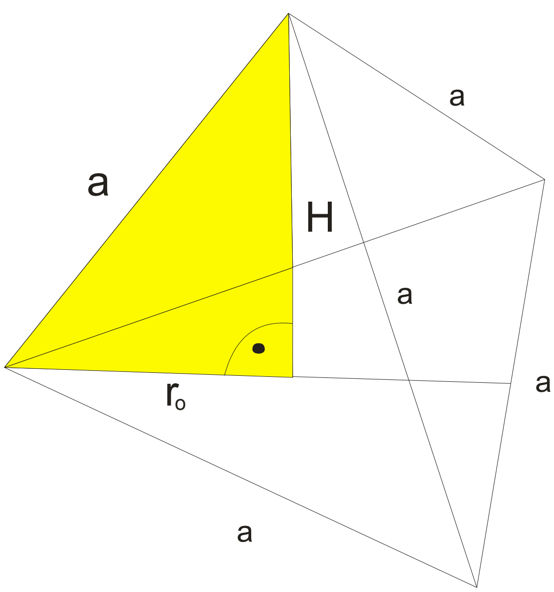


Kao što vidimo, njena površina se sastoji iz 4 jednakostranična trougla pa je:

$$P = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{P = a^2\sqrt{3}}$$

Za zapreminu će nam trebati i visina izražena preko osnovne ivice. Primenjujemo Pitagorinu teoremu:



$$r_0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$H^2 + r_o^2 = a^2$$

$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2$$

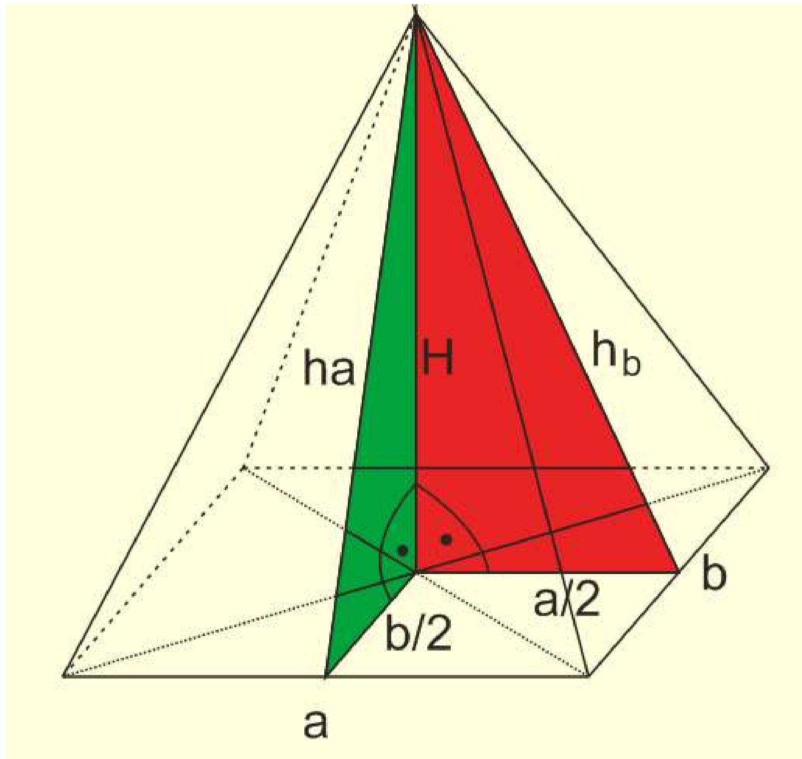
$$H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$H^2 = a^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{9} = \frac{9a^2 - 3a^2}{9}$$

$$H^2 = \frac{6a^2}{9} \rightarrow H = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} \rightarrow \boxed{H = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

I sad je lako naći i zapreminu.

Ako se u bazi nalazi pravougaonik, formulice će biti:



$$P = B + M$$

$$P = ab + \cancel{2} \cdot \frac{ah_a}{\cancel{2}} + \cancel{2} \cdot \frac{bh_b}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{P = ab + ah_a + bh_b}$$

$$V = \frac{1}{3} BH$$

$$V = \frac{1}{3} abH$$

Primenjujemo Pitagorinu teoremu na crveni trougao da nadjemo h_b

$$h_b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$$

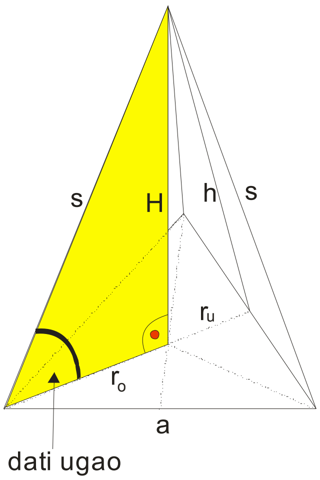
Primenjujemo Pitagorinu teoremu na zeleni trougao da nadjemo h_a

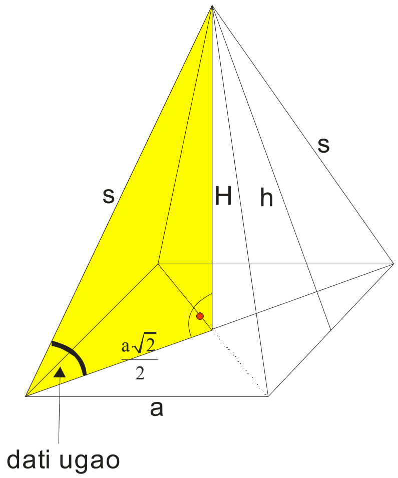
$$h_a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + H^2$$

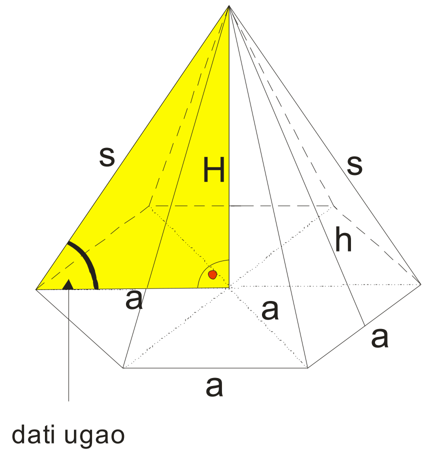
Često se u zadacima daje ugao od 30, 60 ili 45 stepeni.

Da objasnimo o kom uglu se radi!

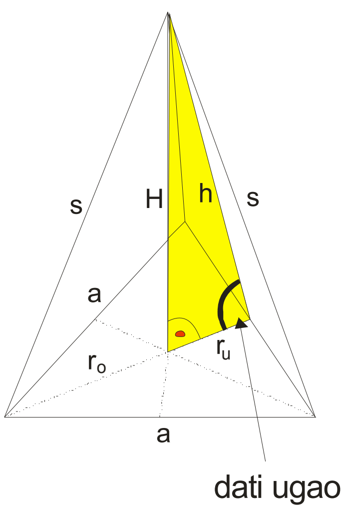
Ako u tekstu zadatka piše da je to ugao BOČNE IVICE PREMA RAVNI OSNOVE onda se radi o uglu:

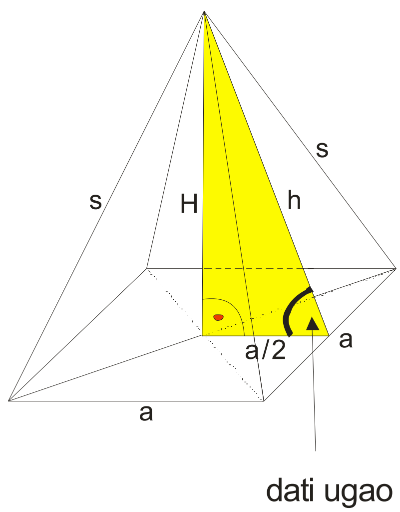


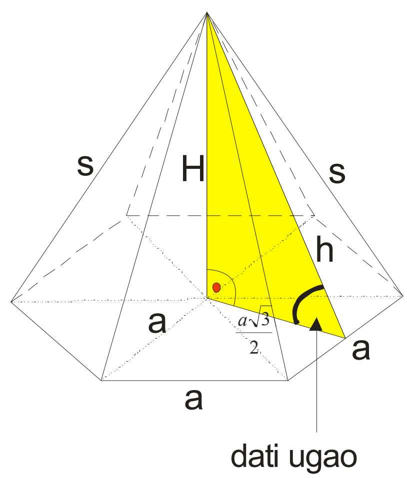




Ako u tekstu zadatka piše da je to ugao BOČNE STRANE PREMA RAVNI OSNOVE onda se radi o uglu:



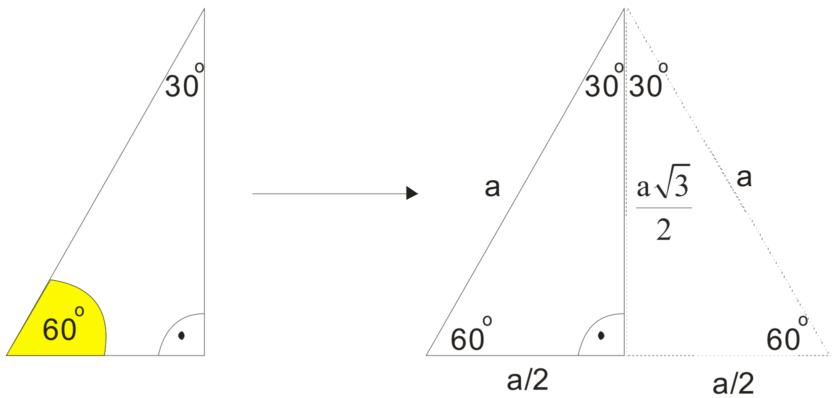




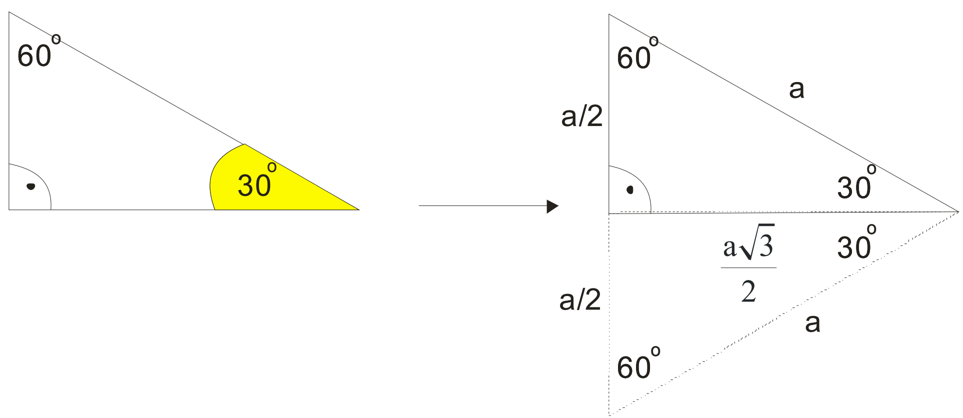
Šta raditi u situaciji kad je dat ugao od 30 ili 60 stepeni ?

Onda vršimo dopunu do jednakostraničnog trougla i tražimo vezu izmedju poznatih i nepoznatih podataka!

Pogledajmo slike:



Ovo je situacija kad je dat ugao od 60 stepeni.



Ovo je situacija kad je dat ugao od 30 stepeni.

Kada nam je dat ugao od 45 stepeni vršimo dopunu do punog kvadrata!